Πανελλήνιες Εξετάσεις Ημερήσιων Γενικών Λυκείων

Εξεταζόμενο Μάθημα: **Μαθηματικά Προσανατολισμού, Θετικών & Οικονομικών Σπουδών**
Ημερομηνία: 6 Ιουνίου 2022

Ενδεικτικές Απαντήσεις Θεμάτων

Θέμα Α

Α1. *Σχολικό βιβλίο, σελίδα 186*

Α2. *Σχολικό βιβλίο, σελίδα 142*

Α3. *Σχολικό βιβλίο, σελίδα 161*

Α4.

α. Σωστό
β. Σωστό
(Αν ήταν $f(0) = f(1)$ από το Θεώρημα Rolle θα υπήρχε x_0 με $f(x_0) = 0$. Άτοπο)
γ. Σωστό
δ. Λάθος
ε. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε: $D_f = (-\infty, 1]$ με $f(x) = (x^2 - 1)^2$ και $D_g = [0, +\infty)$

Για να ορίζεται η $h = f \circ g$ πρέπει και αρκεί:
$\{x \in D_g$ και $g(x) \in D_f\} = \{x \geq 0$ και $\sqrt{x} \leq 1\} = [0,1]$

Άρα, $D_h = [0,1]$ και έχει τύπο:

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = \left[\left(\sqrt{x}\right)^2 - 1\right]^2 = (x-1)^2, x \in [0,1]$$

Β2. Η h είναι συνεχής στο $[0,1]$ και για κάθε $x \in (0,1)$ με $h'(x) = 2(x-1) < 0$.

Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$, επομένως "$1-1$" και συνεπώς αντιστρέψιμη.

Επειδή η h είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$, έχουμε:

$h([0,1]) = [h(1), h(0)] = [0,1] = D_{h^{-1}}$

Θέτουμε $y = h(x) \Leftrightarrow y = (x-1)^2$

Συνεπώς: $\sqrt{y} = |x-1|$ και επειδή $x \in [0,1]$, παίρνουμε:

$\sqrt{y} = -x + 1 \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{y} \Leftrightarrow h^{-1}(y) = 1 - \sqrt{y}, y \in [0,1]$

Άρα: $h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}, x \in [0,1]$

B3. Είναι:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}, & x \in [0,1) \\ \dfrac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$$

i. Ελέγχουμε αν η φ είναι συνεχής στο $[0,1]$:

Είναι συνεχής στο$[0,1)$, ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων:

$\lim\limits_{x\to 1^-} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{2} = \varphi(1)$, επομένως η φ είναι συνεχής στο $x = 1$ και τελικά συνεχής στο $[0,1]$

Επίσης: $\varphi(0) = 1$ και $\varphi(1) = \frac{1}{2}$.

Επομένως, $\varphi(0) \neq \varphi(1)$ άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Ενδιαμέσων Τιμών στο $[0,1]$.

ii. Εφόσον πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Ενδιαμέσων Τιμών, για κάθε αριθμό η μεταξύ του $\varphi(1) = \frac{1}{2}$ και $\varphi(0) = 1$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = \eta$.

Για κάθε $a \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε: $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2} \xLeftrightarrow{\eta\mu x \uparrow [0,\frac{\pi}{2}]} \eta\mu\frac{\pi}{6} < \eta\mu\alpha < \eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \eta\mu\alpha < 1$.

Συνεπώς, για $\eta = \eta\mu\alpha$ προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ έτσι ώστε $\varphi(x_0) = \eta\mu\alpha$, όπου $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για $x < -1$ είναι: $f'(x) = -2$, επομένως υπάρχει $c_1 \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$f(x) = -2x + c_1 \text{ για κάθε } x < -1.$$

Για $x > -1$ είναι: $f'(x) = 3x^2 - 1$, επομένως υπάρχει $c_2 \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$f(x) = x^3 - x + c_2 \text{ για κάθε } x > -1.$$

Όμως: $O(0,0) \in C_f$. Άρα: $f(0) = 0 \Leftrightarrow c_2 = 0$.

Οπότε:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + c_1, & x \le -1 \\ x^3 - x, & x > -1 \end{cases}$$

Όμως η f είναι συνεχής στο $x = -1$, άρα:

- $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) \Leftrightarrow 2 + c_1 = 0 \Leftrightarrow c_1 = -2$
- $f(-1) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 0$

Τελικά:

$$f(x)=\begin{cases}-2x-2, & x\le -1\\ x^3-x, & x>-1\end{cases}$$

Γ2.

i) Η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0,f(x_0))$ είναι: $(\varepsilon): y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0),\ (1)$,
όπου $f(x_0)=x_0^3-x_0$ και $f'(x_0)=3x_0^2-1$, εφόσον $x_0>-1$.
Οπότε: $(1)\Leftrightarrow y-x_0^3+x_0=(3x_0^2-1)(x-x_0)$
Αφού $\Gamma(0,-2)\in C_f$ θα είναι:

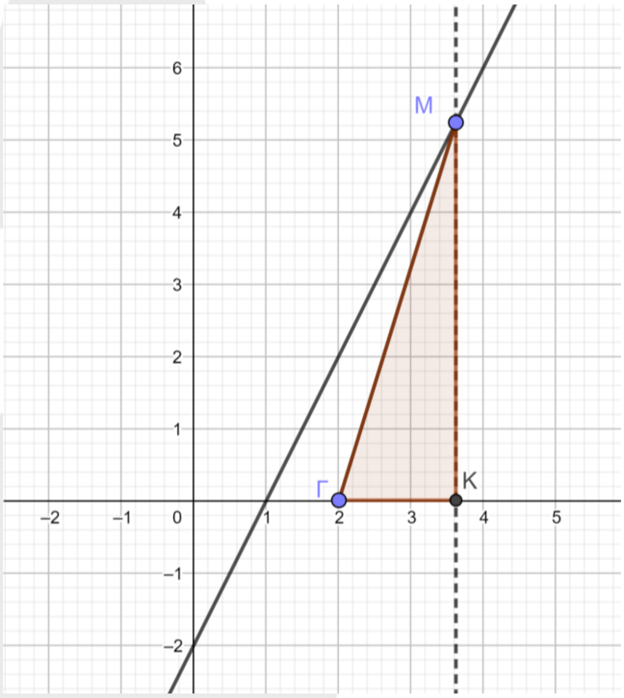
$$-2-x_0^3+x_0=(3x_0^2-1)(-x_0)$$
$$\Leftrightarrow -2-x_0^3+x_0=-3x_0^3+x_0$$
$$\Leftrightarrow 2x_0^3=2$$
$$\Leftrightarrow x_0=1, \text{αφού } x_0>-1$$

Τελικά, η εξίσωση της εφαπτομένης είναι :

$$y=2(x-1)\Leftrightarrow y=2x-2$$

Γ3.

Έστω $M(x(t),y(t))$ η θέση του σημείου M κάθε χρονική στιγμή $t\ge 0$ με $x(t)>2$
και $x'(t)=2\ \mu o\nu/s$. Το εμβαδό του, ορθογωνίου στο Γ, τριγώνου είναι: $(MK\Gamma)=\frac{1}{2}\,(K\Gamma)(KM)$
και για κάθε χρονική στιγμή t δίνεται από τη συνάρτηση:



$$E(t)=\frac{1}{2}(x(t)-2)\cdot y(t)$$
$$\Leftrightarrow E(t)=\frac{1}{2}(x(t)-2)(2(x(t)-2)$$
$$\Leftrightarrow E(t)=x^2(t)-3x(t)+2,\ \ t\ge 0$$

Η $E(t)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με:

$$E'(t)=2x(t)\cdot x'(t)-3x'(t)=4x(t)-6$$

Τη χρονική στιγμή t_0 ισχύει: $x(t_0)=3$ άρα
$E'(t_0)=6\ \tau\varepsilon\tau.\mu o\nu./s$

Γ4. Ισχύει για $x<0$:

$$\left|\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\right|\le\frac{1}{|f(x)|}=\frac{1}{|-2x-2|}=\frac{1}{2|x+1|}$$

με

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2|x+1|}=0$$

Άρα, σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}=0, \qquad (1)$$

Επίσης, όταν $x \to -\infty$ είναι για $x < 1 \Leftrightarrow -x > -1$ οπότε:

$$\frac{f(-x)}{1-x^3} = \frac{-x^3+x}{1-x^3} = \frac{x^3-x}{x^3-1}$$

Οπότε:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(-x)}{1-x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-x}{x^3-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1, \quad (2)$$

Άρα, τελικά από τις (1) και (2):

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1-x^3}\right] = 0+1 = 1$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. i) Έχουμε την εξίσωση $f(x) = 0$ η οποία γράφεται ισοδύναμα $x - \ln(3x) = 0$.

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$.

Έχουμε $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$ και $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

Έτσι, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Έχουμε f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ επομένως $f\big((0,1]\big) = [f(1), \lim_{x\to0^+} f(x)) = [1-\ln 3, +\infty)$ αφού $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}(x-\ln(3x)) = +\infty$ διότι $\lim_{x\to0^+}\ln(3x) = -\infty$.

Επίσης, f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ επομένως $f\big([1,+\infty)\big) = [f(1), \lim_{x\to+\infty} f(x)) = [1-\ln 3, +\infty)$ αφού

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x-\ln(3x)) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{\ln(3x)}{x}\right) = (+\infty)(1-0)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 3x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{3x}3}{1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$ εφαρμόζοντας τον κανόνα De L' Hospital.

- $0 \in f\big((0,1]\big)$ (αφού $1-\ln 3 < 0 \Leftrightarrow \ln e < \ln 3$) άρα υπάρχει $x_1 \in (0,1)$ με $f(x_1) = 0$ (είναι $x_1 \neq 1$ αφού $f(1) < 0$). Το x_1 είναι μοναδική λύση της $f(x) = 0$ στο $(0,1]$ αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα.
- $0 \in f\big([1,+\infty)\big)$ άρα υπάρχει $x_2 \in (1,+\infty)$ με $f(x_2) = 0$ (πάλι είναι $x_2 \neq 1$ αφού $f(1) < 0$). Το x_2 είναι μοναδική λύση της $f(x) = 0$ στο $(1,+\infty)$ αφού η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ άρα η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

Δ2. Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $(x_1, 0)$ και $(x_2, 0)$ με $x_1 < x_2$.

Η f είναι συνεχής στο (x_1,x_2) με $x_1<x_2$ και δε μηδενίζεται επομένως διατηρεί πρόσημο στο (x_1,x_2). Είναι $1\in(x_1,x_2)$ και $f(1)<0$ άρα $f(x)<0$ στο (x_1,x_2), οπότε $f(x)\le 0$ για κάθε $x\in[x_1,x_2]$. Έτσι,

$$E=\int_{x_1}^{x_2}|f(x)|dx=-\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx=-\int_{x_1}^{x_2}(x)'f(x)dx=-[xf(x)]_{x_1}^{x_2}+\int_{x_1}^{x_2}xf'(x)dx$$
$$=-\big(x_2f(x_2)-x_1f(x_1)\big)+\int_{x_1}^{x_2}x\left(1-\frac{1}{x}\right)dx=0+\int_{x_1}^{x_2}x\left(1-\frac{1}{x}\right)dx=\int_{x_1}^{x_2}(x-1)dx$$
$$=\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_{x_1}^{x_2}=\frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_1+x_2-2)$$

που είναι το ζητούμενο εμβαδόν.

Δ3. Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι $E>0$ και $x_2-x_1>0$ άρα $x_1+x_2-2>0$ επομένως:

$x_2>2-x_1$

Επίσης έχουμε $2-x_1>1\Leftrightarrow x_1<1$ που ισχύει. Επομένως

$x_2>2-x_1>1,\qquad(1)$

και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$ άρα

$(1)\Leftrightarrow f(x_2)>f(2-x_1)\Leftrightarrow f(2-x_1)<0$

Δ4. Έχουμε ότι η f είναι κυρτή επομένως η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από κάθε εφαπτομένη της με εξαίρεση το σημείο επαφής. Η εφαπτομένη της f στο σημείο $A\big(x_2,f(x_2)\big)=A(x_2,0)$ είναι η $y-0=f'(x_2)(x-x_2)\Leftrightarrow y=f'(x_2)(x-x_2)$.

Άρα έχουμε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $f(x)\ge y$ δηλαδή

$f(x)\ge f'(x_2)(x-x_2),\qquad(2)$

Όπου η ισότητα ισχύει μόνο για $x=x_2$.

Επίσης η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο μόνο στη θέση $x=1$ το οποίο είναι ίσο με $f(1)=1-\ln 3$. Επομένως, για κάθε $x>0$ έχουμε

$f(x)\ge 1-\ln 3,\quad(3)$

και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$.

Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$2f(x)+\ln 3=1+f'(x_2)(x-x_2)\Leftrightarrow f(x)-[f'(x_2)(x-x_2)]=(1-\ln 3)-f(x),(4)$

Με βάση τα παραπάνω, το αριστερό μέλος της (4) είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 0 και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = x_2$, ενώ το δεξί μέλος είναι μικρότερο ή ίσο του 0 και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$.

Επομένως η (4) είναι αδύνατη, αφού $x_2 \neq 1$.

Επιμέλεια:
Βαγγέλης Ράλλης, Γιάννης Μερτίκας, Δημήτρης Βλάχος, Μάριος Παπαδιαμαντής, Γιάννης Αλεξόπουλος, Γιάννης Παπαβασιλείου, Παναγιώτης Συνοδινός, Αποστόλης Κωτσιαρίνης, Κωνσταντίνα Μωραΐτη, Δημήτρης Κότσιρας, Νίκος Αλεξόπουλος, Μαρκάκης Ιάσονας, Ηρώ Μαρκάκη

Ευχόμαστε καλά αποτελέσματα!