2ο Διαγώνισμα Προσομοίωσης

Εξεταζόμενο Μάθημα: **Μαθηματικά Προσανατολισμού Οικονομικών Σπουδών**

Ημερομηνία: Ιούνιος 2021

ΘΕΜΑ Α

Α1.

α. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει: $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x=0$.

Μονάδες 6

Α2. Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο σημειο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;

Μονάδες 4

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
Για κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$ ισχύει $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α. Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β. Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

Μονάδες 5

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Για κάθε ακέραιο αριθμό $k\in\mathbb{Z}-\{0\}$ ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k=-\infty$

β. Τα εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος Δ στα οποία η f' ορίζεται αλλά είναι διαφορετική από το μηδέν δεν είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f.

γ. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0\in(\alpha,\beta)$ τότε η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο x_0.

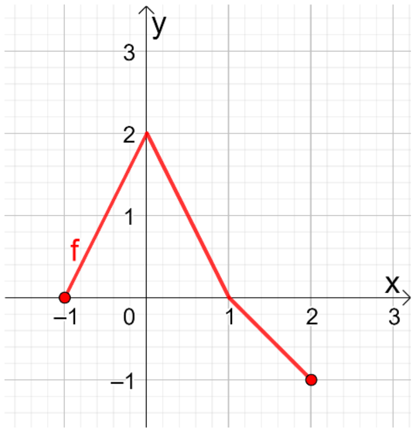
δ. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης δεν είναι απαραίτητα μέγιστο της συνάρτησης.

ε. Έστω οι συναρτήσεις f με πεδίο ορισμού το A και g με πεδίο ορισμού το B, όπου A, B δύο μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Τότε η σύνθεση $f\circ g$ ορίζεται αν $g(A)\cap B\neq\emptyset$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω $f:[-1,2] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Β1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f \circ f$.

Μονάδες 4

Β2. Να μελετήσετε την $f \circ f$ ως προς την μονοτονία σε κάθε ένα από τα διαστήματα $[-1,0], [0,1]$ και $[1,2]$.

Μονάδες 9

Β3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της $f \circ f$.

Μονάδες 7

Β4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-1,2)$ ώστε να ισχύει $f\big(f(x_0)\big) = x_0$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Έστω συνεχής συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$x \cdot f(x) = x + 2\,\eta\mu x, \text{ για κάθε } x \neq 0.$$

Γ1. Να υπολογίσετε το $f(0)$ και τον τύπο της f.

Μονάδες 4

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Μονάδες 5

Γ3. Να βρείτε την παράγωγο της f και να εξετάσετε αν η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[-\pi, \pi]$.

Μονάδες 5

Γ4. Να αποδείξετε ότι σε όλα τα διαστήματα της μορφής $(\kappa\pi, (\kappa+1)\pi)$, με $\kappa \in \mathbb{N}^*$, η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle και υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός ξ τέτοιος ώστε: $\sigma\varphi\xi = \frac{1}{\xi}$

Μονάδες 6

Γ5. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία στο διάστημα $[0, \pi]$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 2, x \in (0, +\infty)$.

Δ1. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και την ελάχιστη τιμή της f.

Μονάδες 7

Δ2. Αν είναι $\beta < 1 < \alpha$ και ισχύει: $f(\alpha - 1) + f(1 - \beta) = -2$ να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = 0$.

Μονάδες 4

Δ3.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες ρ_1 και ρ_2 με $0 < \rho_1 < 1 < \rho_2$.

β. Αν είναι $\kappa > 0$ και ισχύει $f(x) \geq f(\kappa)(x-1) - 1$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι $\kappa = \rho_1$ ή $\kappa = \rho_2$.

Μονάδες 8

Δ4. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση: $F(x) = (x+1)\ln x - 3x, \quad x \in (0, +\infty)$.
Να αποδείξετε ότι η F έχει ένα τοπικό ελάχιστο και ένα τοπικό μέγιστο.

Μονάδες 6

Ενδεικτικές Απαντήσεις 2ου Διαγωνίσματος

ΘΕΜΑ Α

Α1.

α. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 106.

β. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 97.

Α2. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 140.

Α3.

α. Ψευδής.

β. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^4$. Επειδή η $f'(x) = 4x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, η $f(x) = x^4$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Εντούτοις, η $f''(x)$ δεν είναι θετική στο $\mathbb{R}$, αφού $f''(0) = 0$.

Α4.

α. **Λάθος.** Διότι αν για παράδειγμα $k < 0$ τότε: $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = 0$ ή αν $k > 0$ άρτιος $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = +\infty$

β. **Σωστό.** Αν η f είναι παραγωγίσιμη και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε ένα εσωτερικό σημείο x_0 ενός διαστήματος Δ τότε από το Θεώρημα Fermat θα ισχύει: $f'(x_0) = 0$.

γ. **Σωστό.** Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο είναι σίγουρα συνεχής στο σημείο αυτό.

δ. **Σωστό.** Η συνάρτηση μπορεί να μην έχει ολικό μέγιστο.

ε. **Λάθος.** Η συνάρτηση $f \circ g$ ορίζεται όταν: $g(B) \cap A \neq \emptyset$.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Από το σχήμα το σύνολο τιμών της f είναι το $[-1,2]$. Η σύνθεση fof ορίζεται για εκείνα τα x, για τα οποία ισχύουν:

$$\begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-1,2] \\ f(x) \in [-1,2] \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1,2]$$

τελικά η $f \circ f$ ορίζεται στο $[-1,2]$ με $(f \circ f)(x) = f\big(f(x)\big)$ για κάθε $x \in [-1,2]$.

Β2.

α. Για $x_1, x_2 \in [-1,0]$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$ (1)
αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1,0]$.
Όμως τα στοιχεία $f(x_1)$ και $f(x_2)$ ανήκουν στο διάστημα $[0,2]$ όπου η f είναι γνησίως φθίνουσα. Επομένως από την (1) παίρνουμε ισοδύναμα
$f\big(f(x_1)\big) > f(f(x_2)) \Leftrightarrow (f \circ f(x_1) > (f \circ f)(x_2)$ και η $f \circ f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1,0]$.

β. Για $x_1, x_2 \in [0,1]$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$ (2) αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$.
Όμως τα $f(x_1)$ και $f(x_2)$ είναι στοιχεία του διαστήματος $[0, 2]$ όπου η f είναι γνησίως φθίνουσα. Επομένως από την (2) παίρνουμε ισοδύναμα
$f\big(f(x_1)\big) < f\big(f(x_2)\big) \Leftrightarrow (f \circ f)(x_1) < (f \circ f)(x_2)$ και η $f \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$.

γ. Για $x_1, x_2 \in [1,2]$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$ (3) αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,2]$.
Τα $f(x_1)$ και $f(x_2)$ είναι στοιχεία του διαστήματος $[-1,0]$ όπου η f είναι γνησίως αύξουσα. Έτσι από την (3) παίρνουμε ισοδύναμα
$f\big(f(x_1)\big) > f\big(f(x_2)\big) \Leftrightarrow (f \circ f)(x_1) > (f \circ f)(x_2)$ και η $f \circ f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,2]$.

Β3. Έστω $g = f \circ f$, και ισχύουν:

$g(-1) = (f \circ f)(-1) = f\big(f(-1)\big) = f(0) = 2$

$g(0) = (f \circ f)(0) = f\big(f(0)\big) = f(2) = -1$

$g(1) = (f \circ f)(1) = f\big(f(1)\big) = f(0) = 2$

$g(2) = (f \circ f)(2) = f\big(f(2)\big) = f(-1) = 0$

α. Η g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = [-1,0]$ και άρα $g(\Delta_1) = [g(0), g(-1)] = [-1,2]$.

β. Η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [0,1]$ και άρα $g(\Delta_2) = [g(0), g(1)] = [-1,2]$.

γ. Η g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_3 = [1,2]$ και άρα $g(\Delta_3) = [g(2), g(1)] = [0,2]$.

Τελικά για $\Delta = [-1,2]$ ισχύει $g(\Delta) = g(\Delta_1) \cup g(\Delta_2) \cup g(\Delta_3) = [-1,2]$.

Β4. Έστω η συνάρτηση $h(x) = f\big(f(x)\big) - x,\;\; x \in [-1,2]$.

- Η h είναι συνεχής στο $[-1,2]$
- $h(-1) = f\big(f(-1)\big) + 1 = 2 + 1 = 3 > 0$ και
  $h(2) = f\big(f(2)\big) - 2 = 0 - 2 = -2 < 0$

Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-1,2)$ ώστε να ισχύει:
$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f\big(f(x_0)\big) = x_0$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για κάθε $x \neq 0$ είναι: $f(x) = 1 + 2\frac{\eta\mu x}{x}$.

Εφόσον f: συνεχής, $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(1 + 2\frac{\eta\mu x}{x}\right) = 3$

Οπότε η f έχει τύπο: $f(x) = \begin{cases} 1 + 2\frac{\eta\mu x}{x} & x \neq 0 \\ 3 & x = 0 \end{cases}$

Γ2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g\colon \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - 2 = 2\frac{\eta\mu x}{x} - 1$.

Η g είναι συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ με $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\frac{\eta\mu\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} - 1 = \frac{4}{\pi} - 1 > 0$ και $g(\pi) = -1 < 0$.

Δηλαδή $g\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot g(\pi) < 0$.

Επομένως σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ με $g(x_o) = 0 \Leftrightarrow f(x_o) = 2$.

Γ3. Η f είναι παραγωγίσιμη για $x \neq 0$ με $f'(x) = \left(1 + 2\frac{\eta\mu x}{x}\right)' = \frac{2(x\,\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)}{x^2}$

Για να δούμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$ υπολογίζουμε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\left(1 + \frac{2\eta\mu x}{x} - 3\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{2}{x}\left(\frac{\eta\mu x}{x} - 1\right)\right] = \lim_{x\to 0}\left[2 \cdot \frac{(\eta\mu x - x)}{x^2}\right]$$

$= \lim_{x \to 0} \left[2 \cdot \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)}{2x} \right] = 0$, με χρήση του κανόνα $D.L.H.$
Οπότε: $f'(0) = 0$. Επίσης $f(-\pi) = 1 = f(\pi)$.
Άρα η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[-\pi, \pi]$.

Γ4. Η f είναι συνεχής σε κάθε διάστημα της μορφής $[\kappa\pi, (\kappa+1)\pi], \kappa \in \mathbb{N}$ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του με $f(\kappa\pi) = 1 + \frac{2\eta\mu(\kappa\pi)}{\kappa\pi} = 1$

$f\big((\kappa+1)\pi\big) = 1 + 2\frac{\eta\mu\big((\kappa+1)\pi\big)}{(\kappa+1)\pi} = 1$

Επομένως $f(\kappa\pi) = f((\kappa+1)\pi)$ και η f πληροί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος $Rolle$ σε διάστημα της μορφής $(\kappa\pi, (\kappa+1)\pi)$. Οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\kappa\pi, (\kappa+1)\pi)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{\xi^2}(\xi \cdot \sigma\upsilon\nu\xi - \eta\mu\xi) = 0$

$\Leftrightarrow \xi \cdot \sigma\upsilon\nu\xi - \eta\mu\xi = 0 \Leftrightarrow \xi \cdot \sigma\upsilon\nu\xi = \eta\mu\xi \Leftrightarrow \sigma\varphi\xi = \frac{1}{\xi}$

Εφόσον $\xi \in (\kappa\pi, (\kappa+1)\pi)$ ισχύει $\eta\mu\xi \neq 0$. (Οι ρίζες της $\eta\mu x = 0$ είναι $x = \kappa\pi$).

Γ5. Είναι $f'(x) = \frac{2}{x^2} \cdot (x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)$, για $x \neq 0$ (1)
Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$ για $x \in [0, \pi]$.
Η φ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με $\varphi'(x) = \sigma\upsilon\nu x - x\,\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$
$\Leftrightarrow \varphi'(x) = -x \cdot \eta\mu x < 0$, για κάθε $x \in (0, \pi)$.
Επομένως η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi]$ και για κάθε $x \in (0, \pi)$ θα ισχύει:
$\varphi(x) < \varphi(0) \Leftrightarrow x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x < 0$
Έτσι από τη σχέση (1) συμπεραίνουμε ότι $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, \pi)$ δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, \pi]$.

ΘΕΜΑ Δ
Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x > 0$, με

$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$

Παρατηρούμε ότι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ και έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα μονοτονίας-ακροτάτων:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Ο.Ε.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Έχει τοπικό, και μάλιστα ολικό, ελάχιστο στο $x_0 = 1$, το $f(1) = -1$.

Δ2. Για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \geq -1$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$.
Άρα ισχύουν $f(a-1) \geq -1$ και $f(1-\beta) \geq -1$, και άρα $f(a-1) + f(1-\beta) \geq -2$.
Για να ισχύει: $f(a-1) + f(1-\beta) = -2$ πρέπει και αρκεί:
$\Leftrightarrow \begin{cases} f(a-1) = -1 \\ f(1-\beta) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - 1 = 1 \\ 1 - \beta = 1 \end{cases}$, εφόσον η f έχει ελάχιστη τιμή $f(1) = -1$.
Άρα $\alpha = 2$ και $\beta = 0$.

Δ3.

- Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = (0,1]$ και άρα $f(\Delta_1) = \left[f(1), \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\right) = [-1,+\infty)$, όπου περιέχεται το $y = 0$.

Άρα υπάρχει $\rho_1 \in (0,1]$, και μάλιστα μοναδικό, ώστε $f(\rho_1) = 0$ και αφού $f(1) = -1 \neq 0$, ισχύει $0 < \rho_1 < 1$

- Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = [1,+\infty)$ και άρα $f(\Delta_2) = \left[f(1), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right) = [-1,+\infty)$, όπου περιέχεται το $y = 0$.
- Άρα, υπάρχει $\rho_2 \in [1,+\infty)$, και μάλιστα μοναδικό, ώστε $f(\rho_2) = 0$ και αφού $f(1) = -1 \neq 0$, ισχύει $\rho_2 > 1$.

Για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$f(x) \geq f(\kappa)\cdot(x-1) - 1 \Leftrightarrow f(x) - f(\kappa)\cdot(x-1) \geq -1 \Leftrightarrow g(x) \geq -1$$

με $g(x) = f(x) - f(\kappa)\cdot(x-1),\ x > 0$.

Άρα για κάθε $x > 0$ ισχύει $g(x) \geq g(1)$.

Συνεπώς, η g έχει ελάχιστο στο 1, που είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος, και η g είναι παραγωγίσιμη στο $x = 1$.

Σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα είναι $g'(1) = 0 \Leftrightarrow f'(1) - f(\kappa) = 0$

$\Leftrightarrow f(\kappa) = 0 \Leftrightarrow \kappa = \rho_1$ ή $\kappa = \rho_2$

Δ4. Η F είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x > 0$, με

$$F'(x) = \ln x + \frac{x+1}{x} - 3 = \ln x + \frac{1}{x} - 2 = f(x)$$

και $F'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \rho_1$ ή $x = \rho_2$.

Επίσης ισχύουν:

- $x < \rho_1 \Leftrightarrow f(x) \geq f(\rho_1) = 0$, αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$
- $x > \rho_2 \Leftrightarrow f(x) > f(\rho_2) = 0$, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.
- Η f διατηρεί πρόσημο στο (ρ_1,ρ_2) και αφού $f(1) = -1 < 0$, ισχύει $f(x) < 0$, για $x \in (\rho_1,\rho_2)$.

Επομένως προκύπτει ο παρακάτω πίνακας μονοτονίας-ακροτάτων για την F:

x	0	ρ_1	1	ρ_2	$+\infty$
$F'(x) = f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
F	$\nearrow$	Τ.Μ.	$\searrow$	Τ.Ε.	$\nearrow$

Τελικά η F παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x = \rho_1$ και τοπικό ελάχιστο στο $x = \rho_2$.

Επιμέλεια:

Η ομάδα μαθηματικών του ΜΕΘΟΔΙΚΟΥ

Ευχόμαστε καλά αποτελέσματα!