2ºΔιαγώνισμα Προσομοίωσης

Εξεταζόμενο Μάθημα: **Μαθηματικά Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών**

Ημερομηνία:Ιούνιος 2021

ΘΕΜΑ Α

Α1.Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημαΔκαι x_0 ένα εσωτερικό σημείο του $Δ$. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι: $f'(x_0) = 0$

Μονάδες 8

Α2. Έστω συνάρτηση f συνεχής, σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η f είναι κοίλη, και πότε κυρτή, στο διάστημα Δ;

Μονάδες 4

Α3.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
Αν η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) και υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi) = 0$ τότε $f(\alpha) = f(\beta)$.
α.Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.
β.Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Μονάδες 4

Α4.Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν η f δεν έχει σημεία καμπής, τότε ισχύει $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
2. Έστω $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν το $f(\alpha)$ είναι τοπικό ακρότατο της f, τότε ισχύει $f'(\alpha) = 0$.
3. Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 0$ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η παράγωγος f' είναι συνεχής συνάρτηση και $\alpha < 0 < \beta$, τότε η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[\alpha, \beta]$.
4. Η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της συνάρτησης $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$, $0 < x \neq 1$.
5. Έστω $f(x) = ημx,\ x \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύει $\lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = f(x)$για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Α5. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε κάθε περίπτωση:

Ι. Ποιο από τα παρακάτω όρια δεν είναι καλώς ορισμένο;

1. $\lim_{x \to 0} \ln(x^2 - x)$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4-x^3-x}$
3. $\lim\limits_{x\to0}\ln(2x+x^2-1)$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^4-x-2}$

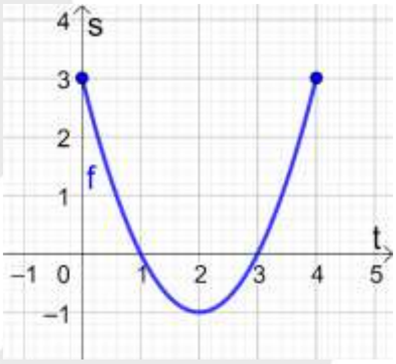
II. Ποια από τις παρακάτω ευθείες είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f της $f(x)=\frac{1+\ln(-x)}{x}$, $x<0$ στο $-\infty$;

1. $y=-1$
2. $y=1$
3. $y=0$
4. $y=-e$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Β

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης θέσης $x=s(t)$ ενός κινητού, που κινείται σε άξονα, στο χρονικό διάστημα 0 sec έως 4 sec.



Β1. Να βρείτε:

1. πότε το κινητό κινείται κατά τη θετική φορά και πότε κατά την αρνητική φορά.
2. το συνολικό διάστημα, που έχει διανύσει το κινητό.

Μονάδες 9

Β2. Να αποδείξετε ότι κατά το χρονικό διάστημα $[2,4]$ υπάρχει μια τουλάχιστον χρονική στιγμή, όπου η ταχύτητα του κινητού είναι ίση με την μέση ταχύτητα για αυτό το χρονικό διάστημα της κίνησης.

Μονάδες 8

Β3. Να αποδείξετε ότι τη χρονική στιγμή $t=2$ το κινητό σταματά στιγμιαία, δηλαδή έχει μηδενική ταχύτητα.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:
$f'(x)\neq0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-\sqrt{x+3}+2}{x^2-1}=\frac{3}{8}$$

Γ1. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(1,f(1))$.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x^2-3)}{x^2-3x+2}$$

Μονάδες 6

Γ3. Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x - e^{-x} + 1 - \eta\mu 2x) = 0$.

Μονάδες 7

Γ4. Αν επιπλέον η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε:

1) να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
2) αν $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ να υπολογίσετε την τιμή του ορίου:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(\eta\mu\theta) \cdot x^4 - 3x^2 + 2}{f\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}\right) \cdot x^3 - 3x + 1}$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία γνωρίζουμε ότι:

- $x^2 \cdot f''(x) + x \cdot f'(x) - f(x) + \ln x = 0$ για κάθε $x > 0$ (1)
- η ευθεία $y = 2x - 1$ εφάπτεται στη C_f στο σημείο $A\big(1, f(1)\big)$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \ln x + x$, με $x > 0$.

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη, να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφής της, να λύσετε την εξίσωση $f(x) = e^{x-1} + x - 1$ και την ανίσωση: $f^{-1}(x) > x$.

Μονάδες 8

Δ3. Αν η f^{-1} είναι συνεχής, να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\eta\mu\left(f^{-1}(x)\right)}{x}$ και να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $x_0 \in (0,1)$ τέτοιος ώστε να ισχύει: $x_0 = f^{-1}(0)$.

Μονάδες 7

Δ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $x_1 \in (0, +\infty)$ τέτοιος ώστε να ισχύει:

$$\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{1}{x_1}$$

Μονάδες 4

Ενδεικτικές Απαντήσεις 2ου Διαγωνίσματος

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου, σελ. 142-143

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου, σελ. 155

Α3.

α. Ψευδής

β. Δεν ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος Rolle. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(-1,2)$ με $f'(x) = 2x$ οπότε παρατηρούμε ότι $f'(0) = 0$ αλλά $f(-1) = 1 \neq 4 = f(2)$.

Α4.

1. **Λάθος.** Υπάρχει περίπτωση να μηδενίζεται η f'' σε ένα σημείο x_0 αλλά να μην αλλάζει εκατέρωθεν του x_0 το πρόσημο της f'', οπότε το σημείο $M(x_0, f(x_0))$ να μην είναι σημείο καμπής της C_f.

2. **Λάθος.** Το θεώρημα Fermat ισχύει για εσωτερικά σημεία του διαστήματος $[\alpha,\beta]$. Εξάλλου, στα άκρα ενός κλειστού διαστήματος, μια συνάρτηση παρουσιάζει πάντα τοπικό ακρότατο.
3. **Σωστό.** Εφόσον η f' διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$ η f θα είναι γνησίως μονότονη. Αν f γνησίως αύξουσα τότε για $\alpha<0<\beta$ συμπεραίνουμε ότι: $f(\alpha)<f(0)<f(\beta) \Leftrightarrow f(\alpha)<0<f(\beta)$. Επειδή f παραγωγίσιμη, είναι και συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$, άρα η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. Ομοίως, αν f γνησίως φθίνουσα.
4. **Λάθος.** Είναι: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=1$ με χρήση του κανόνα D.l.H.
5. **Λάθος.** Είναι: $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$ και $f''(x)=-\eta\mu x$, οπότε $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}=f''(x)=-f(x)$.

Α5.Ι.

Απάντηση: **γ.**

Αιτιολόγηση: Σε περιοχή του $x=0$ η παράσταση $2x+x^2-1$ διατηρεί αρνητικό πρόσημο επομένως δεν ορίζεται η συνάρτηση $\ln(2x+x^2-1)$. Άρα το όριο γ. δεν είναι καλώς ορισμένο.

ΙΙ.

Απάντηση: **γ.**

Αιτιολόγηση: Είναι: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1+ln(-x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-\frac{1}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\frac{1}{x}=0$ *με χρήση του κανόνα D.l.H. για την απροσδιόριστη μορφή* $\frac{+\infty}{-\infty}$.

ΘΕΜΑ Β

Β1. α. Παρατηρούμε από τη γραφική παράσταση ότι κατά το χρονικό διάστημα $[0,2]$ η συνάρτηση θέσης είναι γνησίως φθίνουσα και έτσι το κινητό κινείται προς τα αριστερά ενώ κατά το χρονικό διάστημα $[2,4]$ η συνάρτηση θέσης είναι γνησίως αύξουσα και άρα το κινητό κινείται προς τα δεξιά.

β. Για το συνολικό διάστημα έχουμε: $s_{o\lambda}=|s(2)-s(0)|+|s(4)-s(2)|=|-1-3|+3-(-1)|=4+4=8$

Β2. Κατά το χρονικό διάστημα $[2,4]$ το κινητό κινείται προς τα δεξιά, και η μέση ταχύτητα του κινητού σε αυτό το χρονικό διάστημα είναι:

$$v_\mu=\frac{s(4)-s(2)}{4-2}=\frac{3-(-1)}{4-2}=2$$

Επιπλέον, η συνάρτηση s είναι συνεχής στο $[2,4]$ και παραγωγίσιμη στο $(2,4)$ με $s'(t)=v(t)$. Σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει μια τουλάχιστον χρονική στιγμή $t_0\in(2,4)$ τέτοια ώστε να ισχύει:

$$s'(t_0)=\frac{s(4)-s(2)}{4-2}\Leftrightarrow v(t_0)=2.$$

Β3. Από τη γραφική παράσταση της s παρατηρούμε ότι η συνάρτηση s έχει ελάχιστο στο $t = 2$ το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος $[0,4]$ στο οποίο η s είναι παραγωγίσιμη στο $t = 2$. Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει: $s'(2) = 0 \Leftrightarrow v(2) = 0$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για κάθε x σε περιοχή του $x = 1$ Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = \frac{f(x) - \sqrt{x+3} + 2}{x^2 - 1}$$

για την οποία γνωρίζουμε ότι $\lim_{x\to 1} g(x) = \frac{3}{8}$.

Κοντά στο $x = 1$ ισχύει $f(x) = (x^2-1)\cdot g(x) + \sqrt{x+3} - 2$ οπότε

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(x^2-1)\cdot\lim_{x\to 1} g(x) + \lim_{x\to 1}\left(\sqrt{x+3}-2\right)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = 0$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x = 1$ ισχύει $f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) = 0$.

Για την παράγωγο στο $x = 1$ έχουμε:

$$f'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)\cdot g(x) + \sqrt{x+3} - 2}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\left[(x+1)\cdot g(x) + \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}\right] = \lim_{x\to 1}\left[(x+1)\cdot g(x) + \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 1}\left[(x+1)\cdot g(x) + \frac{1}{\sqrt{x+3}+2}\right] = 2\cdot\frac{3}{8} + \frac{1}{4} = 1$$

Άρα $f'(1) = 1$.

Τελικά, η εφαπτόμενη ευθεία της C_f στο $A\left(1, f(1)\right)$ έχει εξίσωση:

$$y - f(1) = f'(1)\cdot(x-1) \Leftrightarrow y = x - 1.$$

Γ2. Για τον υπολογισμό του ορίου παρατηρούμε ότι η αντικατάσταση$u = x^2 - 3$ δίνει όριο $u \to 1$, επομένως σχηματίζουμε το όριο $\lim_{x\to 2}\frac{f(x^2-3)-f(1)}{(x^2-3)-1}$ που μπορεί να υπολογιστεί με την αντικατάσταση αυτή. Επομένως, έχουμε:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x^2-3)}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 2}\left(\frac{f(x^2-3)-f(1)}{x^2-3x+2}\right)$$

$$= \lim_{x\to 2}\left(\frac{f(x^2-3)-f(1)}{(x^2-3)-1}\cdot\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}\right) = 4$$

διότι:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x^2-3)-f(1)}{(x^2-3)-1} = \lim_{u\to 1}\frac{f(u)-f(1)}{u-1} = f'(1) = 1$$

θέτοντας $u = x^2 - 3$, οπότε: $u \to u_0$ με $u_0 = \lim_{x\to 2} u = \lim_{x\to 2}(x^2-3) = 1$

$$\text{και } \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot(x+2)}{(x-2)\cdot(x-1)} = 4$$

Γ3. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$ με $x_1 \neq x_2$. Έστω ότι $x_1 < x_2$.
Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με $f(x_1) = f(x_2)$.
Από το θεώρημα Rolle υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi \in (x_1, x_2)$: $f'(\xi) = 0$ το οποίο είναι άτοπο αφού ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως η f έχει την ιδιότητα «1-1». Έτσι έχουμε:

$$f(e^x - e^{-x} + 1 - \eta\mu 2x) = 0$$
$$\Leftrightarrow f(e^x - e^{-x} + 1 - \eta\mu 2x) = f(1)$$
$$\overset{1-1}{\Leftrightarrow} e^x - e^{-x} + 1 - \eta\mu 2x = 1$$
$$\Leftrightarrow e^x - e^{-x} - \eta\mu 2x = 0 \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = e^x - e^{-x} - \eta\mu 2x$, με $x \in \mathbb{R}$.
Η h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x) = e^x + e^{-x} - 2\sigma\upsilon\nu 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Όμως ισχύει $e^x - e^{-x} = e^x + \frac{1}{e^x} \geq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$,
διότι: $e^x + \frac{1}{e^x} \geq 2 \Leftrightarrow e^{2x} - 2e^x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (e^x - 1)^2 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
και $\sigma\upsilon\nu 2x \leq 1 \Leftrightarrow -2\sigma\upsilon\nu 2x \geq -2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Επομένως ισχύει $e^x - e^{-x} - 2\sigma\upsilon\nu 2x \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$, δηλαδή $h'(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$ και επειδή η h είναι συνεχής στο $x = 0$, η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
Οπότε η h έχει την ιδιότητα «1-1»
Η εξίσωση (1) γράφεται ισοδύναμα $h(x) = h(0) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x = 0$

Γ4.

1) Η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δηλαδή, η f' διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και επειδή $f'(1) = 1 > 0$ ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
2) Ισχύει $\eta\mu\theta < 1 < \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}$ για κάθε $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(\eta\mu\theta) < f(1) < f\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}\right)$

$$\Leftrightarrow f(\eta\mu\theta) < 0 < f\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}\right)$$

Συνεπώς έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(\eta\mu\theta)x^4 - 3x + 2}{f\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}\right)x^3 - 3x + 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(\eta\mu\theta)x^4}{f\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}\right)x^3} = \frac{f(\eta\mu\theta)}{f\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}\right)} \cdot \lim_{x\to-\infty} x = +\infty.$$

ΘΕΜΑ Δ
Δ1. Λόγω της σχέσης (1) ισχύει: $x^2 f''(x) + 2x \cdot f'(x) = x \cdot f'(x) + f(x) - \ln x$
$\Leftrightarrow [x^2 \cdot f'(x)]' = [xf(x) - x \cdot \ln x + x]'$ για κάθε $x > 0$
Άρα, υπάρχει σταθερά $c_1 \in \mathbb{R}$ ώστε: $x^2 \cdot f'(x) = xf(x) - x \cdot \ln x + x + c_1$, (2)
Επειδή η ευθεία $y = 2x - 1$ εφάπτεται στη C_f στο σημείο $A(1, f(1))$, ισχύουν: $f(1) = 1$ και $f'(1) = 2$
Η σχέση (2) για $x = 1$ δίνει $c_1 = 0$.
Επομένως ισχύει:

$$x^2 \cdot f'(x) = xf(x) - x \cdot \ln x + x \Leftrightarrow xf'(x) = f(x) - \ln x + 1 \Leftrightarrow$$

$$xf'(x)-f(x)=1-\ln x \Leftrightarrow \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$
$$\Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{x}\right]'=\left[\frac{\ln x}{x}\right]', \qquad \text{για κάθε } x>0.$$
Άρα υπάρχει σταθερά $c_2 \in \mathbb{R}$:
$$\frac{f(x)}{x}=\frac{\ln x}{x}+c_2$$
Για $x=1$ προκύπτει $c_2=f(1)=1$.
Συνεπώς έχουμε:
$$\frac{f(x)}{x}=\frac{\ln x}{x}+1 \Leftrightarrow f(x)=\ln x+x, \qquad \text{με } x>0.$$

Δ2. Ισχύει: $f'(x)=\frac{1}{x}+1>0$, για κάθε $x>0$. Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A_f=(0,+\infty)$.
Άρα, η f έχει την ιδιότητα «1-1» και επομένως αντιστρέφεται.
Ισχύει: $A_{f^{-1}}=f(A)=\left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.
Για την εξίσωση $f(x)=e^{x-1}+x-1$, με $x>0$ ισοδύναμα έχουμε:
$$\ln x+x=e^{x-1}+x-1 \Leftrightarrow \ln x-e^{x-1}+1=0, \quad (3)$$
Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\ln x-e^{x-1}+1$, με $x>0$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g'(x)=\frac{1}{x}-e^{x-1}$, για κάθε $x>0$ και $g'(1)=0$, ενώ για τη g'' είναι: $g''(x)=-\frac{1}{x^2}-e^{x-1}<0$, για κάθε $x>0$. Οπότε η g' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.
Για κάθε $0<x<1 \overset{g'\downarrow}{\Leftrightarrow} g'(x)>g'(1) \Leftrightarrow g'(x)>0$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_1=(0,1]$.
Για κάθε $x>1 \Leftrightarrow g'(x)<g'(1) \Leftrightarrow g'(x)<0$, οπότε η g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_2=[1,+\infty)$.

Επομένως, η g παρουσιάζει στη θέση $x=1$ ολικό μέγιστο στο $g(1)=0$ και συνεπώς ισχύει:
$$g(x)\le g(1)=0 \text{για κάθε } x>0 \text{ με την ισότητα να ισχύει μόνο για } x=1, (4)$$
Η εξίσωση (3) γράφεται ισοδύναμα: $g(x)=0 \overset{(4)}{\Leftrightarrow} x=1$
Για την ανίσωση: $f^{-1}(x)>x$, με $x\in\mathbb{R}$ παρατηρούμε ότι:
- η ανίσωση αληθεύει για κάθε $x\le 0$ αφού το σύνολο τιμών της f^{-1} είναι το $f^{-1}(\mathbb{R})=A_f=(0,+\infty)$
- για κάθε $x>0$ ισοδύναμα έχουμε:
$$f^{-1}(x)>x \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f\left(f^{-1}(x)\right)>f(x) \Leftrightarrow x>f(x) \Leftrightarrow x>\ln x+x \Leftrightarrow \ln x<0 \Leftrightarrow 0<x<1$$

Επομένως, η ανίσωση αληθεύει για κάθε $x\in(-\infty,1)$.

Δ3. Για τον υπολογισμό του ορίου έχουμε:
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu f^{-1}(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\eta\mu f^{-1}(x)}{f^{-1}(x)}\cdot\frac{f^{-1}(x)}{x}\right]=1\cdot 0=0$$

αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu f^{-1}(x)}{f^{-1}(x)}=\lim\limits_{u\to 0^+}\frac{\eta\mu u}{u}=1$, με την αντικατάσταση $u=f^{-1}(x)$ οπότε $u\to u_0$, όπου

$$u_0=\lim_{x\to-\infty}f^{-1}(x)=0,\qquad \text{με } f^{-1}(x)>0$$

και

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f^{-1}(x)}{x}=\lim_{u\to 0^+}\frac{u}{f(u)}=\lim_{u\to 0^+}\left(\frac{u}{\ln u+u}\right)=0$$

Επίσης για την f γνωρίζουμε ότι είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{e},1\right]$ και $f\left(\frac{1}{e}\right)\cdot f(1)=\frac{1}{e}-1<0$.

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0\in\left(\frac{1}{e},1\right)\subseteq(0,1)$ώστε $f(x_0)=0$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ το x_0 είναι μοναδικό.
Επομένως ισχύει $f(x_0)=0\Leftrightarrow x_0=f^{-1}(0)$ με $x_0\in(0,1)$.

Δ4. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[x,x+1]$, όπου $x>0$ και παραγωγίσιμη στο $(x,x+1)$.
Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει $x_1\in(x,x+1)\subseteq(0,+\infty)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(x_1)=\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}$$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{x_1}+1=\ln(x+1)+x+1-\ln x-x$$
$$\Leftrightarrow\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=\frac{1}{x_1}$$

Επιμέλεια:
Η ομάδα καθηγητών Μαθηματικών του ΜΕΘΟΔΙΚΟΥ

Ευχόμαστε καλά αποτελέσματα!