**Πανελλήνιες Εξετάσεις Ημερήσιων Γενικών Λυκείων – Παλαιό Σύστημα**

Εξεταζόμενο Μάθημα: **Μαθηματικά Προσανατολισμού, Θετικών & Οικονομικών Σπουδών**

**Ημερομηνία: 17 Ιουνίου 2020**

**Ενδεικτικές Απαντήσεις Θεμάτων**

**Θέμα Α**

**Α1.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 111

**Α2.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 104

**Α3.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 74

**Α4.** α. Ψευδής

β. Αν $f(x) = x, x \in \mathbb{R}$, τότε:

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ και $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{f(x)} = -\infty$, $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ επομένως δεν υπάρχει στο $x = 0$ το όριο της $\frac{1}{f(x)}$

**Α5.**

α. **Σωστό**

β. **Σωστό**

γ. **Λάθος**

**ΘΕΜΑ Β**

**Β1.** Έστω $y \in \mathbb{R}$ με:

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{3x+1}{x-3} = y, \qquad x \neq 3$$

$$\Leftrightarrow (x-3)y = 3x+1$$

$$\Leftrightarrow (y-3)x = 3y+1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3y+1}{y-3}, \qquad y \neq 3$$

Επειδή η εξίσωση έχει μοναδική λύση ως προς $x$, η μοναδικότητα εξασφαλίζει ότι η $f$ έχει την ιδιότητα «1-1» και είναι αντιστρέψιμη στο $\mathbb{R} - \{3\}$.

Εναλλακτικά αποδεικνύεται για $x_1, x_2 \in \mathbb{R}-\{3\}$ με $f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x_1=x_2$ που εξασφαλίζει ότι η $f$ είναι «1-1», άρα αντιστρέψιμη.

**Β2.** Η αντίστροφη συνάρτηση ορίζεται στο $\mathbb{R}-\{3\}$ με $f^{-1}(x)=\frac{3x+1}{x-3},\ x \neq 3$

Επομένως παρατηρούμε $D_f = D_{f^{-1}}$ και $f^{-1}(x)=f(x)$. Άρα $f=f^{-1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}-\{3\}$

**Β3.** Για κάθε $x \in \mathbb{R}-\{3\}$ έχουμε: $f(x)=f^{-1}(x) \overset{f:1-1}{\Longleftrightarrow} f\big(f(x)\big)=f(f^{-1}(x)) \Leftrightarrow f\big(f(x)\big)=x$.

**Β4.** Κοντά στο $x=-\frac{1}{3}$ ισχύει:

$$\left|f(x)\cdot \eta\mu\left(\frac{1}{3x+1}\right)\right| = |f(x)|\cdot\left|\eta\mu\left(\frac{1}{3x+1}\right)\right| \leq |f(x)|,$$

αφού ισχύει $\left|\eta\mu\frac{1}{3x+1}\right| \leq 1$ για κάθε $x$ κοντά στο $x=-\frac{1}{3}$.

Επομένως ισχύει:

$$-|f(x)| \leq f(x)\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{3x+1}\right) \leq |f(x)|$$

Όμως, $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}|f(x)| = \lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}(-|f(x)|)=0$

Από το κριτήριο παρεμβολής ισχύει:

$$\lim_{x\to-\frac{1}{3}}\left(f(x)\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{3x+1}\right)\right)=0$$

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.** Είναι: $B\hat{A}\Gamma=\hat{\theta}$, $B\hat{O}M=\hat{\theta}$ και $B\hat{O}\Gamma=2\hat{\theta}$ ως επίκεντρη που βαίνει στο ίδιο τόξο με την $B\hat{A}\Gamma$. Άρα $\Gamma\hat{O}M=\hat{\theta}$, επομένως $OM$:διχοτόμος στο ισοσκελές $B\hat{O}\Gamma$ άρα και διάμεσος και ύψος.
Στο ισοσκελές τρίγωνο $A\hat{B}\Gamma$: $AM$ διάμεσος άρα και ύψος.
Για το εμβαδό του τριγώνου $A\hat{B}\Gamma$: $E=\frac{(AM)\cdot(B\Gamma)}{2}$ (1)
Ισχύει: $(AM)=1+(OM)$ όπου $(OM)=\sigma\upsilon\nu\theta(OB)=\sigma\upsilon\nu\theta$, αφού $(OB)=1$, από το ορθογώνιο τρίγωνο $OMB$.
Άρα, $(AM)=1+\sigma\upsilon\nu\theta$.
Επιπλέον: $(B\Gamma)=2(BM)$, όπου $(BM)=\eta\mu\theta\cdot(OB)=\eta\mu\theta$, αφού $(OB)=1$, από το ορθογώνιο τρίγωνο $OMB$.

Οπότε: $(ΒΓ) = 2ημθ$. Τελικά η σχέση (1) γίνεται:

$$E = \frac{(1 + συνθ) \cdot 2\, ημθ}{2} \Leftrightarrow E = ημθ \cdot (1 + συνθ)$$

**Γ2.** Για κάθε $\theta \in (0, \pi)$ έχω $E(\theta) = (1 + συνθ) \cdot ημθ$

Για κάθε $\theta \in (0, \pi)$ έχουμε:

$E'(\theta) = (1 + συνθ)' \cdot ημθ + (1 + συνθ)(ημθ)'$

$= -ημθ \cdot ημθ + (1 + συνθ) \cdot συνθ$

$= -ημ^2θ + συνθ + συν^2θ$

$= -(1 - συν^2θ) + συνθ + συν^2θ$

$= -1 + συν^2θ + συνθ + συν^2θ$

$= 2συν^2θ + συνθ - 1$

Θέτουμε: $E'(\theta) = 0 \Leftrightarrow\ 2συν^2θ + συνθ - 1 = 0$

Θέτουμε $συνθ = ω$, οπότε η σχέση γίνεται: $2ω^2 + ω - 1 = 0$ με ρίζες:

$ω = \frac{1}{2}$ ή $ω = -2$. Επομένως έχουμε: $συνθ = \frac{1}{2}$ ή $συνθ = -2$, απορρίπτεται,

αφού $-1 \leq συνθ \leq 1$

Άρα έχουμε: $συνθ = συν\frac{\pi}{3}$ με λύσεις: $\theta = 2κπ + \frac{\pi}{3}$ ή $\theta = 2κπ - \frac{\pi}{3}, κ \in \mathbb{Z}$

Όμως $\theta \in (0, \pi)$, άρα για $κ = 0$ έχουμε $\theta = \frac{\pi}{3}$ ή $\theta = -\frac{\pi}{3}$, που απορρίπτεται.

Παρατηρούμε ότι $E(\theta) = (1 + συνθ) \cdot ημθ$ η οποία είναι συνεχής ως πράξη μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

Ακόμη: $E'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$ και $E'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 < 0$, οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $\left(0, \frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$. Άρα:

| $\theta$ | $0$ | | $\frac{\pi}{3}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $E'(\theta)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $E(\theta)$ | | $\nearrow$ | Ο.Μ. | $\searrow$ | |

Άρα η $E$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο στην θέση $x_0 = \frac{\pi}{3}$ το

$E\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(1 + συν\frac{\pi}{3}\right) \cdot ημ\frac{\pi}{3} = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ τ.μ.

**Γ3.** Έστω $Δ_1 = (0, \frac{\pi}{3}]$ και $Δ_2 = [\frac{\pi}{3}, \pi)$ τότε $E(Δ_1) = (\lim\limits_{\theta \to 0^+} E(\theta), E(\frac{\pi}{3})] = (0, \frac{3\sqrt{3}}{4}]$

και $E(Δ_2) = (\lim\limits_{\theta \to \pi^-} E(\theta), E\left(\frac{\pi}{3}\right)] = (0, \frac{3\sqrt{3}}{4}]$

Παρατηρούμε ότι $\frac{3}{4} \in E(\Delta_1)$ και $\frac{3}{4} \in E(\Delta_2)$ και επειδή η $E(\theta)$ είναι γνησίως μονότονη στα $\Delta_1$ και $\Delta_2$ τότε υπάρχουν ακριβώς δύο $\theta_1, \theta_2$ με $\theta_1 < \theta_2$ του $E(\theta_1) = \frac{3}{4}$ και $E(\theta_2) = \frac{3}{4}$

**Γ4.** Η $E$ είναι συνεχής στο $\left[\theta_1, \frac{\pi}{3}\right]$ και $\left[\frac{\pi}{3}, \theta_2\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\theta_1, \frac{\pi}{3}\right)$ και $\left(\frac{\pi}{3}, \theta_2\right)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων.

Από το ΘΜΤ υπάρχουν $\xi_1 \in \left(\theta_1, \frac{\pi}{3}\right)$ και $\xi_2 \in \left(\frac{\pi}{3}, \theta_2\right)$ τέτοια ώστε:

$$E'(\xi_1) = \frac{E\left(\frac{\pi}{3}\right) - E(\theta_1)}{\frac{\pi}{3} - \theta_1} \Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right) \cdot E'(\xi_1) = E\left(\frac{\pi}{3}\right) - E(\theta_1) = \frac{3\sqrt{3} - 3}{4}$$

και

$$E'(\xi_2) = \frac{E(\theta_2) - E\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\theta_2 - \frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow \left(\theta_2 - \frac{\pi}{3}\right) \cdot E'(\xi_2) = E(\theta_2) - E\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3} - 3}{4}$$

Τελικά: $\left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right) \cdot E'(\xi_1) = \left(\frac{\pi}{3} - \theta_2\right) \cdot E'(\xi_2)$

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.** Έχουμε τη συνάρτηση: $f(x) = x \cdot \ln x - \ln(\lambda x)$. Η συνάρτηση είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με:

$$f'(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0, \quad x > 0$$

Η $f'$ γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ με μοναδική ρίζα $f'(1) = 0$

- $0 < x < 1 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < 0$
- $x > 1 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > 0$

Έχουμε πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων:

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | Ο.Ε. | $\nearrow$ | |

Επομένως, η $f$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 1$ το $f(1) = -\ln \lambda$.

Το σημείο ακροτάτου είναι $A\left(1, \ln\frac{1}{\lambda}\right)$. Παρατηρούμε ότι για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda$ το σημείο ανήκει στην ευθεία: $x = 1$.

**Δ2.** Ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$x \geq \lambda x, x > 0$

$\Leftrightarrow \ln x^x \geq \ln(\lambda x), \quad x > 0$

$\Leftrightarrow x\ln x - \ln(\lambda x) \geq 0, \qquad x > 0$

$\Leftrightarrow f(x) \geq 0, x > 0$

Οπότε αρκεί να βρούμε $\lambda$ ώστε: $minf(x) \geq 0 \Leftrightarrow -\ln\lambda \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln\lambda \leq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq 1$

Άρα, η μεγαλύτερη τιμή είναι η $\lambda = 1$.

**Δ3.** Για $\lambda = 1$ είναι $f(x) = x \cdot \ln x - \ln x$, $x > 0$ και $g(x) = x^x$, $x > 0$.

Έστω $(x_0, g(x_0))$ σημείο της $C_g$ με $x_0 > 0$. Τότε η εφαπτομένη έχει εξίσωση:
$y - g(x_0) = g'(x_0) \cdot (x - x_0) \Leftrightarrow y - x_0^{x_0} = x_0^{x_0}(\ln x_0 + 1)(x - x_0)$

Αφού η εφαπτομένη διέρχεται από το $O(0,0)$ έχουμε: $-x_0^{x_0} = x_0^{x_0}(\ln x_0 + 1)(-x_0)$ και $x_0^{x_0} > 0$

Οπότε: $(\ln x_0 + 1)x_0 = 1 \Leftrightarrow x_0 \cdot \ln x_0 + x_0 - 1 = 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h$ με: $h(x) = x\ln x + x - 1$, $x > 0$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με $h'(x) = \ln x + 2$, $x > 0$ και έχουμε τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων:

| $x$ | $0$ | | $e^{-2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $h(x)$ | | ↘ | Ο.Ε. | ↗ | |

Δηλαδή, η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = e^{-2}$ το $y = h(e^{-2})$.

Έχουμε ότι: $h(1) = 0$. Στο διάστημα $A_1 = (0, e^{-2}]$ η $h$ είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε:

$h(A_1) = \left[h(e^{-2}), \lim\limits_{x\to0^+} h(x)\right) = \left[-\frac{1}{e^{-2}} - 1, -1\right)$, διότι $h(e^{-2}) = -\frac{1}{e^2} - 1$

και $\lim\limits_{x\to0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to0^+}(x \cdot \ln x + x - 1) = -1$

Άρα, η εξίσωση $h(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $A_1 = (0, e^{-2}]$.

Στο διάστημα $A_2 = [e^{-2}, +\infty)$ η $h$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχή με $h(1) = 0$, άρα η εξίσωση $h(x) = 1$ έχει μοναδική ρίζα τη $x_0 = 1$.

Η εφαπτομένη της $C_g$ στο $(1, g(1))$ έχει εξίσωση: $y - 1 = 1(x - 1) \Leftrightarrow y = x$.

**Δ4.** Έχουμε: $h(x) = \begin{cases} x^x, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

**i.** Στο $(0, +\infty)$ η $h(x) = x^x \Leftrightarrow h(x) = e^{xlnx}$ είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $e^x$ και $xlnx$. Είναι για $x = 0$: $h(0) = 1$ και $\lim\limits_{x\to0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to0^+} e^{xlnx}$ κάνοντας την αντικατάσταση $u = x\ln x$ το όριο γίνεται $\lim\limits_{x\to0^+} h(x) = \lim\limits_{u\to0^-} e^u = 1$, γιατί

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0, \qquad \text{με } -x<0$$

Άρα αφού $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = h(0)$ η $h$ είναι συνεχής και στο $x=0$, επομένως η $h$ είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$.

**ii.** Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$\varphi(x) = x^{2020}(3-2\int^2 g(t)dt) + (1-x)\int_0^1 h(1-t)dt, \qquad x\in\mathbb{R}.$$

Η $\varphi$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική με: $\varphi(0) = \int_0^1 h(1-t)dt$

Θέτουμε $1-t=u$, τότε $du=-dt \Leftrightarrow dt=-du$

και $u_1=1, u_2=0$ οπότε

$$\int_0^1 h(1-t)dt = \int_1^0 h(u)(-du) = \int_0^1 h(u)du$$

Δηλαδή $\varphi(0) = \int_0^1 h(t)dt > 0$ γιατί $h(t)>0$ για κάθε $t>0$, οπότε $\int_0^1 h(t)dt>0$

Επίσης $\varphi(1) = 3-2\int_1^2 g(t)dt < 0$ γιατί $g(t)\ge t$ για κάθε $t\in[1,2]$ με το « = » να ισχύει μόνο για $t=1$ οπότε $\int_1^2 g(t)dt > \int_1^2 tdt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^2 = 2-\frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2\int_1^2 g(t)dt > 3$

$$\Leftrightarrow 3-2\int_1^2 g(t)dt < 0 \Leftrightarrow \varphi(1)<0$$

Άρα $\varphi(0)\cdot\varphi(1)<0$, οπότε από θεώρημα Bolzano η εξίσωση $\varphi(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0,1).

***Επιμέλεια:***

*Βαγγέλης Ράλλης, Γιάννης Μερτίκας, Δημήτρης Βλάχος, Χρήστος Αναστασίου, Μάριος Παπαδιαμαντής, Γιάννης Αλεξόπουλος, Ιάσονας Μαρκάκης, Νίκος Αλεξόπουλος, Ηρώ Μαρκάκη,*